

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015
Profil Tehnic

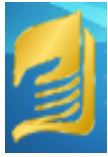


FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

- Se dă mulțimea $M = \{a^2 - 2b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
 - Demonstrați identitatea $(a^2 - 2b^2) \cdot (c^2 - 2d^2) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2$, oricare ar fi numerele reale a, b, c, d .
 - Dacă $u, v \in M$, să se demonstreze că și $u \cdot v \in M$.
 - Utilizând metoda inducției matematice, să se demonstreze că $7^n \in M, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
- O bucată de sârmă având lungimea de 15 m se taie în două bucăți de lungimi diferite și, din fiecare parte se construiește câte un pătrat. Să se determine lungimile celor două bucăți, știind că pătratul obținut prin „îndoirea” părții mai mari are aria de patru ori mai mare decât aria pătratului obținut prin „îndoirea” părții mai mici.
- O mulțime de patru numere naturale se numește **deosebită** dacă admite exact două submulțimi cu câte trei elemente aflate în progresie aritmetică. De exemplu mulțimea $\{10, 11, 12, 14\}$ este **deosebită** deoarece admite submulțimile $\{10, 11, 12\}$, $\{10, 12, 14\}$ având elementele în progresie aritmetică. Dacă $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, să se determine:
 - Numărul mulțimilor **deosebite**, cu câte patru elementele, de forma $\{2, 3, \dots, \dots\}$, având elementele din A.
 - Numărul total al mulțimilor **deosebite** cu elemente din A (evident cu câte patru elemente).
- Se consideră triunghiul ABC și punctele $N \in [BC]$, $M \in [AC]$ astfel încât $\frac{CM}{AM} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{2}$.
 - Să se demonstreze că $\overline{NM} = \frac{1}{6} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$.
 - Dacă $NM \cap AB = \{P\}$ și $\frac{AB}{PB} = k$, să se demonstreze că $\overline{NP} = \frac{k+2}{2k} \cdot \overline{AB} - \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$.
 - Determinați $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{NP} = t \cdot \overline{NM}$ și găsiți valoarea raportului $\frac{AB}{PB}$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015
Profil Tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

- a) Demonstrați că: $\log_2^2(x^3) = 9 \log_2^2(x)$, $(\forall) x > 0$.

b) Rezolvați ecuația: $\sqrt[3]{3 \cdot \log_2^2(x^3)} + 3 \cdot \sqrt[3]{\log_2(x)} - 6 = 0$, $x > 0$.
- a) Demonstrați că $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$. Stabiliți când are loc egalitatea.

b) Rezolvați ecuația: $4^x + 9^x + 2 = 2 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x$, $x \in \mathbb{R}$.

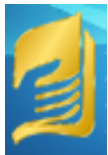
c) Rezolvați ecuația: $\log_3 x + \log_x 3 = 2$, $x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.
- Se consideră numerele complexe: $z_1 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$; $z_2 = 1 + 2i$ și $z_3 = -2 + i$.

a) Calculați: $|z_2 - z_3|$.

b) Să se determine toate perechile de numere întregi (a, b) astfel încât $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$.

c) Dacă $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ demonstrați că $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.
- În trei magazine se vinde același produs. În primul magazin se vând m bucăți cu p lei/bucată. În al doilea magazin se vând cu n bucăți mai mult decât în primul magazin la prețul de 40 lei/bucată, iar în al treilea magazin se vând cu n bucăți mai puțin decât în primul magazin la prețul de 60 lei/bucată. Știind că în cele trei magazine se obțin sume egale de bani din vânzare, aflați prețul de vânzare a unei unități (bucăți) de produs la primul magazin.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015
Profil Tehnic



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Se dă matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & x+3 & x+4 \\ 3 & x+1 & x+5 \end{pmatrix}$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$

- Demonstrați că $A(x)$ este inversabilă dacă și numai dacă $x \neq 0$.
- Demonstrați că nu există $B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(0) \cdot B = A(-1)$.
- Determinați $x \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $A^{-1}(x) \in M_3(\mathbb{Z})$

2. Fie a, b, c , lungimile laturilor unui triunghi și matricea $A(x) = \begin{pmatrix} c-x & b \\ b & c+x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

- Demonstrați că $A(x) + A(-x) = 2 \cdot A(0)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
- Demonstrați că dacă $\det A(a) = 0$, atunci triunghiul dat este dreptunghic.
- Demonstrați că triunghiul dat este isoscel dacă și numai dacă $\det A(0) = 0$

3. a). Se dă funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\alpha \cdot x^4}{(x + \beta)^3}$

Să se determina $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ astfel încât graficul funcției să admită, ca asimptotă oblică spre ∞ dreapta de ecuație $y = x - 3$

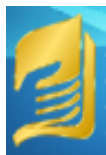
b). Se dă funcția $f: (0, 4) \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 + x + 4}}{x - 3}, & \text{dacă } x \in (0, 3) \\ -\frac{\sin 2(x - 3)}{8(x - 3)}, & \text{dacă } x \in (3, 4) \end{cases}$

Calculați limitele laterale ale funcției f în punctul $x_0 = 3$.

4. Zece elevi $E_1, E_2, E_3, E_4, \dots, E_{10}$ sunt așezați, în această ordine, în „șir indian” (ca și puncte coliniare cu E_1 pe primul loc și E_{10} pe ultimul loc). La o comandă dată, fiecare dintre ei fie că își schimbă locul cu un alt coleg, fie că rămân pe loc. La prima comandă elevii E_1 și E_6 rămân pe locurile lor, iar E_2 schimbă cu E_{10} , E_3 cu E_9 , E_4 cu E_8 și E_5 cu E_7 .

- Care este ordinea lor după prima comandă?
- Este posibil ca după a doua comandă să avem ordinea: $E_{10}; E_1; E_2; E_3; E_4; E_5; E_6; E_7; E_8; E_9$? Justificați răspunsul.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ

14 martie 2015

Profil Tehnic

CLASA A XII-A



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

1. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale se definește legea de compoziție „ $*$ ” prin:

$$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a, (\forall) x, y \in \mathbb{R} \text{ și } a \in \mathbb{R}, \text{ fixat.}$$

a). Să se demonstreze că: $x * y = (x - a) \cdot (y - a) + a, (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

b). Demonstrați că mulțimea $G_a = (a, \infty), a \in \mathbb{R}$ este parte stabilă a mulțimii \mathbb{R} în raport cu legea „ $*$ ”.

c). Demonstrați că $(G_a, *)$ este grup abelian.

d). Rezolvați ecuația: $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{2015 \text{ ori}} = x$

2. Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 7^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{A(x) / x \in \mathbb{R}\}$

a). Verificați faptul că $I_3 \in G$.

b). Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(x + y), (\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

c). Demonstrați că (G, \cdot) este grup comutativ.

3. a). Demonstrați că: $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2), (\forall) x \in \mathbb{R}$

b). Calculați: $\int \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} \cdot dx, x \in \mathbb{R}$

c). Demonstrați că $\frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} < \frac{2}{3}, (\forall) x \in \mathbb{R}$ și dacă există un număr natural nenul n astfel încât să

avem: $\int_0^1 \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} \cdot dx < 0,001$.

4. Se consideră funcția $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{e^{x+1}}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ \frac{2x+m}{x^2+x+e} & \text{dacă } x \in [-1, 0), \text{ unde } m \in \mathbb{R} \end{cases}$

a). Determinați parametrul real m astfel încât funcția f să admită primitive pe intervalul $[-1, \infty)$.

b). Determinați o primitivă $F' = F(x)$ a restricției funcției f la intervalul $[0, \infty)$, care satisface condiția $F(0) = \frac{3}{e}$.

c) Demonstrați că $\int_0^1 f(x) \cdot dx < \frac{3}{e}$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.