INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Profil Tehnic

CLASA A IX-A

1. Se dă mulțimea $M=\{a^2-2b^2 \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$

a) Demonstrați identitatea $(a^2-2b^2)\cdot(c^2-2d^2)=(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2$, oricare ar fi numerele reale a,b,c,d.

b) Dacă $u,v\in M$, să se demonstreze că şi $u\cdot v\in M$.

c) Utilizând metoda inducției matematice , să se demonstreze că $7^n\in M,(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

2. O bucată de sârmă având lungimea de 15 m se taie în două bucăți de lungimi diferite și, din fiecare parte se construieşte câte un pătrat. Să se determine lungimile celor două bucăți, știind că pătratul obținut prin „îndoirea” părții mai mari are aria de patru ori mai mare decât aria pătratului obținut prin „îndoirea” părții mai mici.

3. O mulțime de patru numere naturale se numeşte ***deosebită*** dacă admite exact două submulțimi cu câte trei elemente aflate în progresie aritmetică. De exemplu mulțimea $\{10,11,12,14\}$ este ***deosebită*** deoarece admite submulțimile $\{10,11,12\}$, $\{10,12,14\}$ având elementele în progresie aritmetică. Dacă $A=\{1,2,3,...,10\}$, să se determine :

a) Numărul mulțimilor ***deosebite****,* cu câte patru elementele, de forma $\{2,3,..,...\}$, având elementele din A.

b) Numărul total al mulțimilor ***deosebite*** cu elemente din A (evident cu câte patru elemente).

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $N\in[BC]$, $M\in[AC]$ astfel încât $\frac{CM}{AM}=\frac{CN}{CB}=\frac{1}{2}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Dacă $NM\cap AB=\{P\}$ şi $\frac{AB}{PB}=k$, să se demonstreze că $\overrightarrow{NP}=\frac{k+2}{2k}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$.

c) Determinați $t\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{NP}=t\cdot\overrightarrow{NM}$ și găsiți valoarea raportului $\frac{AB}{PB}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. a) Demonstrați că: $\log_2^2(x^3)=9\log_2^2(x),\ (\forall)x>0$.

b) Rezolvați ecuația: $\sqrt[3]{3\cdot\log_2^2(x^3)}+3\cdot\sqrt[3]{\log_2(x)}-6=0,\ x>0$.

2. a) Demonstrați că $a^2+b^2+2\geq 2a+2b, (\forall)\,\mathrm{a}, b\in\mathbb{R}$. Stabiliți când are loc egalitatea.

b) Rezolvați ecuația: $4^x+9^x+2=2\cdot 2^x+2\cdot 3^x, x\in\mathbb{R}$.

c) Rezolvați ecuația: $\log_3 x+\log_x 3=2, x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$.

3. Se consideră numerele complexe: $z_1=a+ib, a, b\in\mathbb{R}; z_2=1+2i$ şi $z_3=-2+i$.

a) Calculați: $|z_2-z_3|$.

b) Să se determine toate perechile de numere întregi (a, b) astfel încât $|z_1-z_2|=\sqrt{5}$.

c) Dacă $|z_1-z_2|=|z_1|+|z_2|$ demonstrați că $\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

4. În trei magazin se vinde acelaşi produs. În primul magazin se vând ***m*** bucăți cu ***p*** lei/bucată. În al doilea magazine se vând cu ***n*** bucăți mai mult decât în primul magazin la prețul de 40 lei/bucată, iar în al treilea magazin se vând cu ***n*** bucăți mai puțin decât în primul magazine la prețul de 60 lei/bucată. Ştiind că în cele trei magazine se obțin sume egale de bani din vânzare, aflați prețul de vânzare a unei unități(bucăți) de produs la primul magazin.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015
Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A XI-A

1. Se dă matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & x+3 & x+4\\ 3 & x+1 & x+5\end{pmatrix}, (\forall)\ x\in\mathbb{R}$

a). Demonstrați că $A(x)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $x\neq 0$.

b). Demonstrați că nu există $B\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(0)\cdot B=A(-1)$.

c). Determinați $x\in\mathbb{Z}^*$ astfel încât $A^{-1}(x)\in M_3(\mathbb{Z})$

2. Fie a,b,c, lungimile laturilor unui triunghi şi matricea $A(x)=\begin{pmatrix}c-x & b\\ b & c+x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}$.

a). Demonstrați că $A(x)+A(-x)=2\cdot A(0), (\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

b). Demonstrați că dacă $\det A(a)=0$, atunci triunghiul dat este dreptunghic.

c). Demonstrați că triunghiul dat este isoscel dacă şi numai dacă $\det A(0)=0$

3. a). Se dă funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\alpha\cdot x^4}{(x+\beta)^3}$

Să se determina $\alpha,\beta\in(0,\infty)$ astfel încât graficul funcției să admită, ca asimptotă oblică spre ∞ dreapta de ecuație $y=x-3$

b). Se dă funcția $f:(0,4)\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3}, & \text{dacă } x\in(0,3)\\ -\dfrac{\sin 2(x-3)}{8(x-3)}, & \text{dacă } x\in(3,4)\end{cases}$

Calculați limitele laterale ale funcției f în punctul $x_0=3$.

4. Zece elevi $E_1, E_2, E_3, E_4, \ldots\ldots\ldots\ldots, E_{10}$ sunt aşezați, în această ordine, în „şir indian” (ca şi puncte coliniare cu E_1 pe primul loc şi E_{10} pe ultimul loc). La o comandă dată, fiecare dintre ei fie că îşi schimbă locul cu un alt coleg, fie că rămân pe loc. La prima comandă elevii E_1 şi E_6 rămân pe locurile lor, iar E_2 schimbă cu E_{10}, E_3 cu E_9, E_4 cu E_8 şi E_5 cu E_7.

a) Care este ordinea lor după prima comandă?

b) Este posibil ca după a doua comandă să avem ordinea: $E_{10}; E_1; E_2; E_3; E_4; E_5; E_6; E_7; E_8; E_9$? Justificați răspunsul.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

Profil Tehnic

CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se defineşte legea de compoziție „ $*$ ” prin:
$x * y = xy - ax - ay + a^2 + a, (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$, fixat .

a). Să se demonstreze că: $x * y = (x-a)\cdot(y-a)+a, (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

b). Demonstrați că mulțimea $G_a = (a, \infty),\ a \in \mathbb{R}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „ $*$ ”.

c). Demonstrați că $(G_a, *)$ este grup abelian.

d). Rezolvați ecuația: $\underbrace{x * x * x * \ldots\ldots\ldots\ldots * x}_{2015\ ori} = x$

2. Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 7^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$ şi mulțimea $G = \{A(x) / x \in \mathbb{R}\}$

a). Verificați faptul că $I_3 \in G$.

b). Demonstrați că $A(x)\cdot A(y) = A(x+y), (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$.

c). Demonstrați că $(G, \bullet)$ este grup comutativ.

3. a). Demonstrați că: $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)\cdot(x^2 - 2x + 2), (\forall)\ x \in \mathbb{R}$

b). Calculați: $\int \frac{x^2+2}{x^4+4}\cdot dx, x \in \mathbb{R}$

c). Demonstrați că $\frac{x^2+2}{x^4+4} < \frac{2}{3}, (\forall)\ x \in \mathbb{R}$ şi dacă există un număr natural nenul n astfel încât să avem: $\int_0^1 \frac{x^2+2}{x^4+4}\cdot dx < 0{,}001$.

4. Se consideră funcția $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, dată prin: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{e^{x+1}}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ \frac{2x+m}{x^2+x+e} & \text{dacă } x \in [-1, 0), \text{ unde } m \in \mathbb{R} \end{cases}$

a). Determinați parametrul real m astfel încât funcția f să admită primitive pe intervalul $[-1, \infty)$.

b). Determinați o primitivă $F' = F(x)$ a restricției funcției f la intervalul $[0, \infty)$, care satisface condiția $F(0) = \frac{3}{e}$.

c) Demonstrați că $\int_0^1 f(x)\cdot dx < \frac{3}{e}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*